Bíró Csaba és Kusper Gábor

Átvéve 2016 November 9.

Absztrakt: a mi célunk hogy olyan propozíciós logikai formát csináljunk, amivel lemodellezünk egy irányított gráfot és SAT megoldóval elemezzük. Ez a modell hasonlít a jól ismert Aspvall et al.-ra, de ők 2SAT problémából csináltak irányított gráfot, mi pont ellenkezőleg 2SAT problémából csinálunk irányított gráfot. Az ő rovatukban, ha a 2SAT probléma nem kielégíthető akkor a belőle készített gráfnak is erősen összetettnek kell lennie „Strongly Connected”. A mi esetünkben, ha az irányított gráf erősen összetett, akkor a legenerált 2SAT, fekete-fehér probléma, aminek két megoldása van: ha minden változó igaz (fehér hozzárendelés), és hogyha mindegyik hamis (fekete hozzárendelés). Ha azt mondjuk, hogy a kiválasztott irányított gráf legyen egy kommunikációs hálózat modellje, akkor feltehetjük a kérdést, „Egy csomópont képes üzenetet küldeni egy másik csomópontnak a hálózaton keresztül?” Még pontosabban, „Minden csomópont tud üzenetet küldeni minden másiknak?”, azaz erősen összefüggő a gráf, vagy sem.

1. Bemutatkozás

A propozíciós kielégíthetőség problémája, hogy egy képletet határozhassunk meg propozíciós logikához az az, hogy van-e igazságérték hozzárendelése a változókhoz, amelyeket ez a képlet igaznak értékel. SAT alatt azt a propozíciós kielégíthetőségi problémát értjük, amely formulák konjunktív normál formában vannak (KNF). A SAT kérdés az egyik legtöbbet kutatott NP teljes probléma a számítógép tudomány terén, beleértve a teoretikus számítógép tudományt, mesterséges intelligenciát, hardver dizájnt, és a hivatalos ellenőrzést. A modern szekvenciális SAT megoldók a Davis-Putnam-Logemann-Loveland (DPPL) algoritmuson alapszanak. Ez az algoritmus Boolean változó bővítést (BCP) hajt végre, és változók elágazását, azaz minden csúcson a keresőfában kiválaszt egy választó változót, ami igaz értéket rendel hozzá, és konfliktus esetén tesz egy lépést hátra.

K-SAT alatt azon képletek propozíciós elégedettségének problémáját értjük CNF-ben, amelyeknek minden klóz legfeljebb K literálból áll. Miközben a 2SAT problémák lineáris időben megoldhatóak, a 3SAT problémák NP teljesek. Napjaink legígéretesebb ágazata a Langlands program esetén, ami az algebrai szám teóriát összekapcsolja az automorf formáival, és ábrázolás elmélettel. Egy másik jó példa a modularitás (formálisan Tanuyama-Shimura-Weil konjektura), ami azt állítja, hogy az elliptikus görbéken túl a racionális számok halmaza kötődik a moduláris formákhoz. A moduláris tétel nélkül Andrew Wiles nem tudta volna bizonyítani Fermat utolsó tételét.

Ebben a cikkben kapcsolatot mutatunk be irányított gráfok és propozíciós logikai képletek között. Bebizonyítunk egy teóriát, ami megengedi egy algoritmus használatát a propozíciós logika halmazából, hogy leellenőrizzük a gráf tulajdonságait. Nevezetesen átátalakítunk egy gráfot egy SAT problémává, hogy leellenőrizzük, hogy a gráf erősen összetett, vagy sem.

A legkiemelkedőbb grafikonábrázolások a következők:

* Az implikációs gráf egy ferde-szimmetriás irányított gráf, ahol a csúcsok literálok (Boolean algebrai változók, és az ő negáltjai), ahol az élek implikációt jelentenek. Jegyezzük meg, hogy a bináris klózok jelenti a két implokációt az implikációs gráfban: , és és ebből adódóan az implikációs gráf ferde-szimmetriás gráf, azaz izomorf a saját transzponáltjára.
* Az AIG (And-Inverter Graph), magyarul És-Invertáló Gráf egy irányított aciklusos gráf, ahol a csúcsok logikai konjukciók két bemenő éllel, az egyik negálással megjelölt, bemenetként Boolean változókat adunk meg, kimenet pedig a képlet lesz.
* A BDD (Reduced Ordered Binary Decision Diagram), magyarul redukált sorrendű bináris döntés diagramm egy gyökeres, irányított, aciklusos csúcsokból álló gráf, amik Boolean változók és terminális csúcsok, amit 0 terminálónak hívunk, ami terminálja az utakat ahol a képlet hamisnak értékelődik; és 1 terminálónak hívjuk, ami terminálja az utakat ahol a képlet igaznak értékelődik. Minden nem terminális csúcsnak két gyermek csúcsa van, amit alsó gyermeknek hívunk, ennek megfelelő élt 0 élnek hívjuk; és a magas gyereknek megfelelő élt 1 élnek hívjuk; amik a lehetséges értékei a szülő csúcsnak. Muszáj bármilyen izomorf algráfot összeolvasztania és megszüntetni bármelyik csúcsot, amelyiknek két izomorf gyermeke van.
* A ZDD vagy ZBDD (Zero-Suppressed Binary Decision Diagram), magyarul nullára szorított bináris döntés diagramm egy fajta bináris döntés diagramm, ami a „szűntesd meg bármely csúcsot, aminek két gyermeke izomorf” szabály helyett a „szűntesd meg azokat a csúcsokat, aminek 1 éle pontosan egy 0 terminálóra mutat” szabályt használja. Ha egy SAT problémának csak pár megoldása van, akkor a ZDD jobban bemutatja, mint a BDD.

Amint láthatjuk, nagy erőfeszítések történtek a képletektől a gráfokig tartó irányban. Ebben a cikkben a másik utat tanulmányozzuk, a gráfoktól a képletekig tartó irányt. A mi modellünkben a csúcsok Boolean változók, és az élek implikációk. Ez azt jelenti, hogy a mi modellünk hasonló az implikációs gráfhoz, de az implikációs gráfok esetében a csúcsok literálok. Az intuíció a mi modellünk esetében a vezeték nélküli szenzorok (WSN – Wireless Sensor Network) halmazából jön, ahol releváns probléma, hogy a egyes szenzorok kommunikálni tudjanak egymással a hálózatban. Ha a hálózat egy irányított gráffal van reprezentálva, ahol a csúcsok a szenzorok, az élek pedig a szenzorok közti adat kommunikációt reprezentálják, akkor ez a probléma leegyszerűsödik arra, hogy csak azt kell leellenőrizzük, hogy a gráf erősen összetett-e.

Ezt a problémát SAT megoldóval, ezért át kell alakítanunk a fentebbi irányított gráfot egy SAT problémává. Mivel a mi modellünkben minden él egy logikai implikációt jelent, ezért legenerálhatunk egy 2-SAT problémát, ahol minden klóznak pontosan egy pozitív és egy negatív literálja van.

132. oldal 3. bekezdés.